



Colle de mathématiques n° 20  
MP\*1 & MP\*2  
Semaine du 16 au 21 mars 2020

**Équations différentielles linéaires**

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

**a) Généralités**

Équation différentielle linéaire :

$$x' = a(t)x + b(t)$$

où  $a$  est une application continue de  $I$  dans  $\mathcal{L}(E)$  et  $b$  une application continue de  $I$  dans  $E$ .

Problème de Cauchy.

Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre  $n$  par un système différentiel linéaire.

Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre  $n$ .

Forme matricielle : systèmes différentiels linéaires  $X' = A'(t)X + B(t)$ .

Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire.

Principe de superposition.

Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.

**b) Solutions d'une équation différentielle linéaire**

Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Cas des équations scalaires d'ordre  $n$ .

Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, E)$ . Pour  $t_0$  dans  $I$ , l'application  $x \mapsto x(t_0)$  est un isomorphisme de cet espace sur  $E$ .

Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre  $n$ .

Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.

Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non résolues :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x).$$

Démonstration non exigible.

$\Leftrightarrow I$  : méthode d'Euler pour la recherche d'une solution approchée.

Les étudiants doivent savoir exploiter la recherche de solutions développables en série entière.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

**d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants**

Résolution du problème de Cauchy

$$x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$$

si  $a$  est un endomorphisme de  $E$  et  $x_0$  un élément de  $E$ .

Traduction matricielle.

Pour les calculs explicites, on se borne aux deux cas suivants :  $A$  diagonalisable ou  $n \leq 3$ .

---

**e) Méthode de variation des constantes**

---

Méthode de variation des constantes pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients continus. Dans les exercices pratiques, on se limite au cas  $n = 2$ .

Cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants. Dans les exercices pratiques, on se limite au cas  $n = 2$ .

---

**f) Équations différentielles scalaires du second ordre**

---

Adaptation de la méthode de variation des constantes aux équations scalaires du second ordre.

Wronskien de deux solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2. Définition et calcul. Cas d'une équation  $x'' + q(t)x = 0$ .

---