



Colle de mathématiques n° 19
MP*1 & MP*2
Semaine du 14 au 19 mars 2022

Équations différentielles linéaires

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités

Équation différentielle linéaire :

$$x' = a(t)x + b(t)$$

où a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$ et b une application continue de I dans E .

Problème de Cauchy.

Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire.

Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n .

Forme matricielle : systèmes différentiels linéaires $X' = A'(t)X + B(t)$.

Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire.

Principe de superposition.

Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.

b) Solutions d'une équation différentielle linéaire

Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Cas des équations scalaires d'ordre n .

Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$. Pour t_0 dans I , l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E .

Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n .

Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.

Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non résolues :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x).$$

Démonstration non exigible.

$\Leftrightarrow I$: méthode d'Euler pour la recherche d'une solution approchée.

Les étudiants doivent savoir exploiter la recherche de solutions développables en série entière.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Résolution du problème de Cauchy

$$x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$$

si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E .

Traduction matricielle.

Pour les calculs explicites, on se borne aux deux cas suivants : A diagonalisable ou $n \leq 3$.

e) Méthode de variation des constantes

Méthode de variation des constantes pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients continus. Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$.

Cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants. Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$.

f) Équations différentielles scalaires du second ordre

Adaptation de la méthode de variation des constantes aux équations scalaires du second ordre.

Wronskien de deux solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2. Définition et calcul. Cas d'une équation $x'' + q(t)x = 0$.
