Colle de mathématiques n° 19
MP*1 & MP*2
Semaine du 09 au 14 mars 2020

Structures algébriques usuelles

Même programme que la semaine dernière, plus :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Groupes et sous-groupes	
Groupe. Produit fini de groupes. Sous-groupe. Caractérisation. Intersection de sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z},+)$.	Exemples issus de l'algèbre et de la géométrie.
b) Morphismes de groupes	
Morphisme de groupes. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme. Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité d'un morphisme. Isomorphisme de groupes. Réciproque d'un isomorphisme.	Exemples : signature, déterminant. Exemple : groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien.
c) Groupes monogènes et cycliques	
Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Groupe monogène, groupe cyclique. Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$. Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.	Groupe des racines n-ièmes de l'unité.
d) Ordre d'un élément dans un groupe	
Élément d'ordre fini d'un groupe, ordre d'un tel élément.	Si x est d'ordre fini, l'ordre de x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x.
Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de G, alors, pour n dans $\mathbb{Z}$, on a $x^n = e \Longleftrightarrow d \mid n$.	
L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.	La démonstration n'est exigible que pour G commutatif.

Fonctions vectorielles

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie E.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Dérivabilité en un point	
Dérivabilité en un point.	Formes équivalentes : taux d'accroissement, développement limité à l'ordre 1. Interprétation cinématique. ⇆ PC : vitesse instantanée. Traduction par les coordonnées dans une base de E.
Dérivabilité à droite et à gauche d'une fonction en un point.	
b) Opérations sur les fonctions dérivables	
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivabilité et dérivée de $L \circ f$, où L est linéaire. Dérivabilité et dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire.	
Cas du produit scalaire.	⇆ PC : dérivée de la densité volumique de l'énergie électromagnétique.
Dérivabilité et dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle.	
Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$.	⇆ PC et SI : vecteur accélération.
c) Intégration sur un segment	
Intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$, à valeurs dans E.	Définie par les intégrales des coordonnées dans une base. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. ⇆ PC et SI : intégration d'un champ de vecteurs en mécanique et électromagnétisme.
Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles. Inégalité $\left\Vert \int_a^b f \right\Vert \leqslant \int_a^b \Vert f \Vert$.	
Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.	Extension de l'énoncé relatif aux fonctions numériques étudié en MPSI.
e) Intégrale fonction de sa borne supérieure	
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue.	Ce paragraphe fournit l'occasion de revoir les résultats correspondants pour les fonctions numériques et les techniques de calcul de primitives.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	
f) Formules de Taylor	
Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	
Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	Les étudiants doivent connaître la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange).

On posera essentiellement des questions sur le programme d'algèbre.