Colle de mathématiques n° 18
MP*1 & MP*2
Semaine du 10 au 15 février 2025

Équations différentielles linéaires

Dans cette section, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace normé de dimension finie.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Équation différentielle linéaire : $x' = a(t)\cdot x + b(t)$ où a est une application continue de I dans $\mathscr{L}(E)$ et b une application continue de I dans E. Problème de Cauchy. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire. Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.	Forme matricielle : système différentiel linéaire $X' = A(t)X + B(t)$. Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire. Principe de superposition. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
b) Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Cas des équations scalaires d'ordre n. Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E. Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.	La démonstration n'est pas exigible. Adaptation aux systèmes différentiels linéaires.
Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées : $a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t), \quad a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = d(t)$.	Exemples de recherche de solutions développables en série entière.
d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	
Résolution du problème de Cauchy $x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$ si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E.	Traduction matricielle. Pour les calculs explicites, on se limite aux deux cas suivants : a diagonalisable ou $\dim(E) \leqslant 3$.
e) Variation des constantes	
Pour une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2, wronskien d'un couple de solutions. Caractérisation des bases de l'espace des solutions. Méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2.	