



Colle de mathématiques n° 18
MP*1 & MP*2
Semaine du 14 au 19 février 2022

Probabilités

Un exercice de probabilités en plus du programme suivant.

Structures algébriques usuelles

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

e) Anneaux

Anneau. Produit fini d'anneaux.

Les anneaux sont unitaires.

Sous-anneaux. Morphisme d'anneaux. Image et noyau d'un morphisme. Isomorphisme d'anneaux.

Anneau intègre. Corps. Sous-corps.

Les corps sont commutatifs.

f) Idéaux d'un anneau commutatif

Idéal d'un anneau commutatif. Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.

Relation de divisibilité dans un anneau commutatif intègre.

Idéaux de \mathbb{Z} .

Interprétation de la divisibilité en termes d'idéaux.

g) L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Théorème chinois : si m et n sont deux entiers premiers entre eux, isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Indicatrice d'Euler φ . Calcul de $\varphi(n)$ à l'aide de la décomposition de n en facteurs premiers.

Théorème d'Euler.

L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.

Application aux systèmes de congruences.

\Leftrightarrow I : calcul de $\varphi(n)$ à l'aide d'une méthode de crible.

Lien avec le petit théorème de Fermat étudié en première année.

\Leftrightarrow I : codage RSA.

h) Anneaux de polynômes à une indéterminée

Dans ce paragraphe, K est un sous-corps de \mathbb{C} .

Idéaux de $K[X]$.

PGCD de deux polynômes.

Relation de Bézout. Lemme de Gauss.

Par convention, le PGCD est unitaire.

Extension au cas d'une famille finie.

\Leftrightarrow I : algorithme d'Euclide étendu sur les polynômes, recherche simultanée du PGCD et des coefficients de Bézout.

CONTENUS

Irréductible de $K[X]$. Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Les étudiants doivent connaître les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
L'étude des polynômes sur un corps fini est hors programme.
