Colle de mathématiques n° 17
MP*1 & MP*2
Semaine du 07 au 12 février 2022

Variables aléatoires discrètes

Même programme que la semaine précédente plus :

Contenus	Capacités & commentaires
d) Variables aléatoires discrètes	
Étant donnés un ensemble E et un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, une variable aléatoire discrète définie sur Ω est une application X de Ω dans E telle que $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable et que, pour tout x de $X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}$.	Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.
Loi P_X de la variable aléatoire X.	Notations $X \sim Y, X \sim \mathscr{L}$. Notations $(X \geqslant x), (X \leqslant x), (X < x), (X > x)$ pour une variable aléatoire réelle X.
e) Couples de variables aléatoires, variables aléatoires indépendantes	
Couple de variables aléatoires indépendantes. Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.	Extension des résultats vus en première année.
Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour tout m compris entre 1 et $n-1$, et toutes fonctions f et g, les variables $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.	Démonstration non exigible.
Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.	La démonstration est hors programme. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes.
f) Lois usuelles	
Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p. La variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{G}(p)$ si $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = (1-p)^{k-1} p.$$	Notation $\mathscr{G}(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètre p.
Caractérisation comme loi sans mémoire : $$P(X > n+k \mid X > n) = P(X > k).$$	
Pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ.	Notation $\mathscr{P}(\lambda)$.
Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n, $X_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$ et si (np_n) converge vers λ, alors : $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$	$\leftrightarrows$ I : simulation de cette approximation. Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.

g) Espérance

Contenus	Capacités & commentaires
Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, l'espérance de X est la somme, dans $[0,+\infty]$, de la famille $(P(X=x)\ x)_{x\in X(\Omega)}$.	Notation $\mathrm{E}(X)$. ⇆ PC : énergie moyenne de systèmes à spectre discret.
Si X est une variable aléatoire réelle, la variable aléatoire X est dite d'espérance finie si la famille $(x\,P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X.	Notation $\mathrm{E}(X)$. Variables centrées.
Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique, d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.	
Linéarité, positivité et croissance de l'espérance sur l'espace des variables aléatoires d'espérance finie définies sur Ω.	Si $\lvert X\rvert \leqslant Y$ et si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.
Formule de transfert : soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(P(X=x)\ f(x)\big)$ est sommable ; si tel est le cas : $$\mathrm{E}\big(f(X)\big)=\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,P(X=x).$$	Démonstration non exigible.
Inégalité de Markov.	
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes d'espérances finies, alors : $$\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$	

h) Variance, écart type et covariance

Contenus	Capacités & commentaires
Moments.	
Si une variable aléatoire admet un moment d'ordre 2, elle est d'espérance finie.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2, alors XY est d'espérance finie et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$.	
Espace des variables aléatoires définies sur Ω admettant un moment d'ordre 2.	
Variance, écart type.	Notations $\mathrm{V}(X), \sigma(X)$. Variables réduites. ⇆ PC : écart quadratique énergétique.
Relation $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X)>0$, la variable aléatoire $\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable aléatoire géométrique, d'une variable aléatoire de Poisson.	
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	
Covariance de deux variables aléatoires.	
Relation $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes.	
Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.	

i) Loi faible des grands nombres

Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$, on a,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les étudiants doivent savoir retrouver, pour $\varepsilon > 0$, l'inégalité :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

où σ est la variance commune des X_k.
⇆ I : simulation d'une suite de tirages.

j) Fonctions génératrices

Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)\ t^k.$$

La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de G_X.

Détermination de la loi de X par G_X. Utilisation de G_X pour calculer les moments de X.

La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X) = G_X{}'(1)$.

La variable aléatoire X admet un second moment si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.

Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de la variance de X à l'aide de $G_X{}'(1)$ et $G_X{}''(1)$.

Les étudiants doivent savoir calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.