



Colle de mathématiques n° 17
MP*1 & MP*2
Semaine du 24 au 29 février 2020

Variables aléatoires discrètes

Même programme que la semaine précédente plus :

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

d) Variables aléatoires discrètes

Étant donné un ensemble E et un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , une variable aléatoire discrète définie sur Ω est une application X de Ω dans E telle que $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable et que, pour tout x de $X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.
Loi P_X de la variable aléatoire X .

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.

Notations $X \sim Y, X \sim \mathcal{L}$.

Notations $(X \geq x), (X \leq x), (X < x), (X > x)$ pour une variable aléatoire réelle X .

e) Couples de variables aléatoires, variables aléatoires indépendantes

Couple de variables aléatoires indépendantes.
Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Extension des résultats vus en première année.

Si X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour tout m compris entre 1 et $n - 1$, et toutes fonctions f et g , les variables $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Démonstration non exigible.

Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.

La démonstration est hors programme.

Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes.

f) Lois usuelles

Pour p dans $]0, 1[$, loi géométrique de paramètre p .
La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{G}(p)$ si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

Notation $\mathcal{G}(p)$.

Interprétation comme rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètre p .

Caractérisation comme loi sans mémoire :

$$P(X > n + k \mid X > n) = P(X > k).$$

Pour λ dans \mathbb{R}_+^* , loi de Poisson de paramètre λ .

Notation $\mathcal{P}(\lambda)$.

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n , $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et si (np_n) converge vers λ , alors :

\Leftrightarrow I : simulation de cette approximation.

Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

g) Espérance

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^+ , l'espérance de X est la somme, dans $[0, +\infty]$, de la famille $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Si X est une variable aléatoire réelle, la variable aléatoire X est dite d'espérance finie si la famille $(x P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X .

Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique, d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.

Linéarité, positivité et croissance de l'espérance sur l'espace des variables aléatoires d'espérance finie définies sur Ω .

Formule de transfert : soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans \mathbb{R} ; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(P(X = x) f(x))$ est sommable; si tel est le cas :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x).$$

Inégalité de Markov.

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes d'espérances finies, alors :

$$E(XY) = E(X) E(Y).$$

Notation $E(X)$.

\Leftrightarrow PC : énergie moyenne de systèmes à spectre discret.

Notation $E(X)$.

Variations centrées.

Si $|X| \leq Y$ et si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Démonstration non exigible.

h) Variance, écart type et covariance

Moments.

Si une variable aléatoire admet un moment d'ordre 2, elle est d'espérance finie.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2, alors XY est d'espérance finie et $E(XY)^2 \leq E(X^2) E(Y^2)$.

Espace des variables aléatoires définies sur Ω admettant un moment d'ordre 2.

Variance, écart type.

$$\text{Relation } V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

$$\text{Relation } V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Variance d'une variable aléatoire géométrique, d'une variable aléatoire de Poisson.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Covariance de deux variables aléatoires.

Relation $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Cas de variables indépendantes.

Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.

Notations $V(X), \sigma(X)$.

Variations réduites.

\Leftrightarrow PC : écart quadratique énergétique.

Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.