Colle de mathématiques n° 17
MP*1 & MP*2
Semaine du 03 au 08 février 2025

Variables aléatoires discrètes

Même programme que la semaine précédente plus :

Contenus	Capacités & commentaires
i) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance	
Si $\mathrm{E}\left(X^2\right)<+\infty$, X est d'espérance finie.	La notation $X \in L^2$ signifie que X^2 est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^2.
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y sont dans L^2, XY est dans L^1 et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}\left(X^2\right)\mathrm{E}\left(Y^2\right)$.	Cas d'égalité.
Pour $X \in L^2$, variance et écart type de X.	Notations $\mathrm{V}(X), \sigma(X)$. Variables réduites. Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle.
Relation $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\left(X^2\right)-\mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\,\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X)>0$, la variable aléatoire $\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson.	
Covariance de deux variables aléatoires de L^2.	
Relation $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes.	
Variance d'une somme de n variables aléatoires, cas de variables décorrélées.	
j) Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres	
Inégalité de Markov.	
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	
Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors, pour tout $\varepsilon>0$, $$P\left(\left\lvert\frac{S_n}{n}-m\right\rvert\geqslant\varepsilon\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$ où $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ et $m=\mathrm{E}(X_1)$.	Utilisation des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour établir des inégalités de concentration.
k) Fonctions génératrices	
Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $G_X(t)=\mathrm{E}\left(t^X\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)\,t^k$.	La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de G_X.
Détermination de la loi de X par G_X.	
La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X)={G_X}'(1)$.	La démonstration de la réciproque n'est pas exigible. Utilisation de G_X pour le calcul de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	

Équations différentielles linéaires

Dans cette section, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace normé de dimension finie.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Équation différentielle linéaire : $$x' = a(t)\cdot x + b(t)$$ où a est une application continue de I dans $\mathscr{L}(E)$ et b une application continue de I dans E. Problème de Cauchy. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire. Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.	Forme matricielle : système différentiel linéaire $$X' = A(t)X + B(t).$$ Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire. Principe de superposition. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
b) Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Cas des équations scalaires d'ordre n. Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \longmapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E. Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.	La démonstration n'est pas exigible. Adaptation aux systèmes différentiels linéaires.
Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées : $a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t), \quad a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = d(t).$	Exemples de recherche de solutions développables en série entière.
c) Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	
Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe. Exponentielle d'une matrice diagonale. Exponentielle de matrices semblables. Spectre de $\exp(A)$. Continuité de l'exponentielle sur $\mathscr{L}(E)$, sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Dérivation de $t \longmapsto \exp(ta)$ de $t \longmapsto \exp(tA)$. Exponentielle de la somme de deux endomorphismes, de deux matrices carrées, qui commutent.	Notations $\exp(a), \mathrm{e}^a, \exp(A), \mathrm{e}^A$.
d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	
Résolution du problème de Cauchy $$x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$$ si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E.	Traduction matricielle. Pour les calculs explicites, on se limite aux deux cas suivants : a diagonalisable ou $\dim(E) \leqslant 3$.

Les équations différentielles linéaires d'ordre 2 ne sont pas au programme de cette colle.