



Colle de mathématiques n° 16
MP*1 & MP*2
Semaine du 31 janvier au 05 février 2022

Exercice sur les séries entières

On posera

- un exercice sur les séries entières et
- un sur le programme de probabilités ci-dessous (probabilités de première année ou tribus).

Probabilités : révisions de première année

A - Probabilités sur un univers fini

B - Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

Tribus, espaces probabilisés

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Espaces probabilisés

Tribu sur un ensemble Ω .

Événements.

Si \mathcal{A} est une tribu sur Ω , une probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) est une application P définie sur \mathcal{A} , à valeurs dans $[0, 1]$, telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'événements deux à deux disjoints, on ait :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Si Ω est fini ou dénombrable et si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, une probabilité P sur (Ω, \mathcal{A}) s'identifie, via la formule

$$P(\{\omega\}) = p_\omega,$$

à une famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de réels positifs sommable de somme 1.

On se borne à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables.

Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.

Espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) .

Espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

b) Propriétés élémentaires des probabilités

Continuité croissante : si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors :

$$P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Continuité décroissante : si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors :

$$P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements, alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Propriétés presque sûres. Tout développement sur ces notions est hors programme.

c) Probabilités conditionnelles et indépendance

Extension des résultats vus en première année dans le cadre des univers finis : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formules de Bayes.

Couple d'événements indépendants. Famille quelconque d'événements mutuellement indépendants.

Notations $P_B(A), P(A|B)$.