



Colle de mathématiques n° 14
MP*1 & MP*2
Semaine du 13 au 18 janvier 2025

Révisions sur les familles sommables

Suites et séries de fonctions, séries entières

B - Séries entières

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités

Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.

Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Rayon de convergence d'une série entière, défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$, de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

Disque ouvert de convergence.

Intervalle ouvert de convergence.

Si $a_n = O(b_n)$ et donc en particulier si $a_n = o(b_n)$, $R_a \geq R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$.

Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.

Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.

La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$, et elle diverge grossièrement si $|z| > R$.

Rayon de convergence de $\sum n^\alpha x^n$.

La limite du rapport $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ peut être utilisée directement.

b) Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe

Convergence normale d'une série entière sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence.

Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.

c) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

Théorème d'Abel radial :

si $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et si

$$\sum a_n R^n \text{ converge, alors } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

La somme d'une série entière est de classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.

Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.

La démonstration est hors programme.

$$\text{Relation } R(\sum a_n x^n) = R(\sum n a_n x^n).$$

Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un intervalle $]0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

d) Fonctions développables en série entière, développements usuels

Fonction développable en série entière sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R , sur l'intervalle $] -R, R[$.

Développement de $\exp(z)$ sur \mathbb{C} .

Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Développements usuels dans le domaine réel.

Dans le cas réel, lien avec la série de Taylor.

Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.
