



Colle de mathématiques n° 14  
MP\*1 & MP\*2  
Semaine du 17 au 22 janvier 2022

**Exercices sur les séries numériques**

**Séries et familles sommables**

**B - Familles sommables de nombres complexes**

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

**a) Ensembles dénombrables**

Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec  $\mathbb{N}$ .

Les parties infinies de  $\mathbb{N}$  sont dénombrables.

Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de  $\mathbb{N}$ .

Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

Démonstrations non exigibles.

Les ensembles  $\mathbb{N}^2$ ,  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Q}$  sont dénombrables.

L'ensemble  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.

Démonstration non exigible.

**b) Familles sommables**

Famille sommable de réels positifs indexée par un ensemble dénombrable. Somme.

La famille  $(u_i)_{i \in I}$  est dite sommable si l'ensemble des sommes  $\sum_{i \in F} u_i$  où  $F$  décrit l'ensemble des parties finies de  $I$  est majoré; dans ce cas, la somme de la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est la borne supérieure de l'ensemble précédent. Si la famille  $(u_i)_{i \in I}$  n'est pas sommable, sa somme est  $+\infty$ . Dans tous les cas, la somme est notée  $\sum_{i \in I} u_i$ .

Théorème de sommation par paquets :

si  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une partition de  $I$  et  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs, alors la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement si :

Démonstration hors programme.

— Pour tout entier  $n$  la famille  $(u_i)_{i \in I_n}$  est sommable.

— La série  $\sum \left( \sum_{i \in I_n} u_i \right)$  converge.

Dans ce cas :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i \in I_n} u_i \right).$$

Famille sommable de nombres complexes indexée par un ensemble dénombrable

La famille  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable si la famille  $(|u_i|)_{i \in I}$  l'est.

Somme d'une telle famille.

Pour une famille de réels, on se ramène à ses parties positive et négative.

Lorsque  $I = \mathbb{N}$ , lien avec la convergence absolue de la série  $\sum u_n$ .

Invariance de la sommabilité et de la valeur de la somme par permutation de l'ensemble des indices.

Démonstration non exigible.

Linéarité de la somme.

Théorème de sommation par paquets.

Démonstration hors programme.

On vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant le théorème de sommation par paquets à la famille  $(|u_i|)_{i \in I}$ .

### c) Applications des familles sommables

La famille  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  de réels positifs est sommable si et seulement si pour tout  $n$ , la série  $\sum a_{m,n}$  converge et la série  $\sum_{m=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} \right)$  converge. Si tel est le cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} \right).$$

Si la famille  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  de nombres complexes est sommable, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}.$$

On vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant l'énoncé précédent à la famille  $(|a_{m,n}|)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ .

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

### c) Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe.

Continuité de l'exponentielle.

Exponentielle de la somme de deux endomorphismes qui commutent.

Dérivation, si  $a$  est un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, de l'application  $t \mapsto \exp(ta)$ .

Notations  $\exp(a), e^a, \exp(A), e^A$ .

$\Leftrightarrow$  I : calcul de l'exponentielle d'une matrice.

Démonstration non exigible.

Dérivation de  $t \mapsto \exp(tA)$  si  $A$  est une matrice carrée réelle ou complexe.

*Les élèves pourront utiliser la bonne version du théorème de sommation par paquets dans laquelle  $I$  est une réunion (non nécessairement indexée par  $\mathbb{N}$ ) de parties deux à deux disjointes (non nécessairement supposées non vides).*

*On pourra finir la colle par un*

### **Exercice sur les intégrales à paramètres**