



Colle de mathématiques n° 13
MP*1 & MP*2
Semaine du 10 au 15 janvier 2022

Intégration sur un intervalle quelconque

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

f) Passage à la limite sous l'intégrale

Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans \mathbb{K} convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leq \varphi$ pour tout n . Alors :

$$\int_I f_n \rightarrow \int_I f.$$

Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ où J est un intervalle de \mathbb{R} .

Théorème d'intégration terme à terme :

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I , telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge, alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

Démonstration hors programme.

L'hypothèse de continuité par morceaux de f , imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Démonstration hors programme.

L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I |f_n|$.

g) Continuité d'une intégrale à paramètre

Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de \mathbb{R} , f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans \mathbb{K} . On suppose que f est continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde variable. On suppose de plus qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A , $|f(x, \cdot)| \leq \varphi$. Alors

$$g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$$

est définie et continue sur A .

L'hypothèse de continuité par morceaux, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite au voisinage d'un point a de A . Si A est un intervalle de \mathbb{R} , extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de A .

\Leftrightarrow SI : transformée de Laplace.

h) Dérivation d'une intégrale à paramètre

Soit I et J deux intervalles de \mathbb{R} , f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans \mathbb{K} . On suppose que f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable, que, pour tout x de J , $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I , que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $J \times I$, continue par morceaux par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde variable. On suppose de plus qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de J , $|\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)| \leq \varphi$. Alors

$$g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur J et vérifie :

$$\forall x \in J, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Exemples d'étude de fonctions définies comme intégrales : régularité, étude asymptotique.

Extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de J .

Classe \mathcal{C}^k d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse d'intégrabilité de $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \cdot)$ pour tout x de J si $0 \leq j \leq k-1$ et domination sur tout segment de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot)$.

\Leftrightarrow PC : transformée de Fourier.

\Leftrightarrow SI : théorème de la valeur initiale, théorème de la valeur finale.
