Colle de mathématiques n° 11
MP*1 & MP*2
Semaine du 13 au 18 décembre 2021

Espaces préhilbertiens réels (révisions de première année)

Contenus	Capacités & commentaires
a) Produit scalaire	
b) Norme associée à un produit scalaire	
c) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie. Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.	Notation $X^{\perp}$.
d) Bases orthonormales	
h) Matrices orthogonales	
Matrice orthogonale : définition ${}^tAA = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.	
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Lien entre les notions de base orthonormale, isométrie et matrice orthogonale.	
Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie. Matrice orthogonale positive, négative ; isométrie positive, négative.	
Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}(E)$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
i) Isométries vectorielles en dimension 2	

Programme de deuxième année

Représentation des formes linéaires dans un espace euclidien.

Espaces préhilbertiens réels. Endomorphismes des espaces euclidiens

Contenus	Capacités & commentaires
a) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Caractérisation métrique du projeté orthogonal.	⇆ PC : polariseur, loi de Malus.

Contenus	Capacités & Commentaires
Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale. Inégalité de Bessel.	
b) Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel	
Suite totale.	Exemples de suites de polynômes orthogonaux. ⇆ I : calcul explicite des polynômes d'une telle suite ; application à l'approximation des fonctions.
Si $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale totale d'éléments de l'espace préhilbertien E, et si, pour tout n de $\mathbb{N}$, p_n désigne le projecteur orthogonal de E sur Vect $(e_0,\dots,e_n)$, alors, pour tout x de E, $\big(p_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.	
c) Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien	
Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien.	Lien avec les matrices symétriques réelles. La notion d'adjoint d'un endomorphisme est hors programme.
Caractérisation des projecteurs orthogonaux comme projecteurs symétriques. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
Théorème spectral : si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, alors E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; de manière équivalente, il existe une base orthonormale diagonalisant u.	Interprétation matricielle de ce résultat. La notion d'endomorphisme symétrique positif (ou défini positif) est hors programme. ⇆ SI : matrice d'inductance, matrice d'inertie.
d) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle d'un espace euclidien.	Autre dénomination : automorphisme orthogonal. Lien avec les matrices orthogonales.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale.	Interprétation dans le registre matriciel.
Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	La forme réduite justifie la terminologie « rotation ». ⇆ SI : liaisons entre solides.

Les espaces préhilbertiens considérés dans ce chapitre sont réels.
Toute notion sur les espaces préhilbertiens complexes est hors programme.
Attention :

- *il n'y a pas de forme quadratique ni d'adjoint (ni d'endomorphismes autoadjoints mais seulement des « endomorphismes symétriques ») ;*
- *la notion d'endomorphisme symétrique (défini) positif est hors programme et de même pour les matrices.*