



Colle de mathématiques n° 10
MP*1 & MP*2
Semaine du 06 au 11 décembre 2021

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Même programme que la semaine dernière plus :

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

g) Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Pour u dans $\mathcal{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u . Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$.

Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.

Si d est le degré du polynôme minimal de u , alors la famille $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

Si P annule u , toute valeur propre de u est racine de P .

Théorème de Cayley-Hamilton.

Pour M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, morphisme $P \mapsto P(M)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, idéal annulateur de M , sous-algèbre $\mathbb{K}[M]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le polynôme minimal est unitaire.

Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda) x$.

Démonstration non exigible.

h) Lemme de décomposition des noyaux

Si P_1, \dots, P_r sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P , alors :

$$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u)).$$

i) Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u , ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit.

Traduction matricielle.

j) Endomorphismes à polynôme minimal scindé

S'il existe un polynôme scindé annulant u , décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

Traduction matricielle.

La décomposition de Dunford et la réduction de Jordan sont hors programme.