



Colle de mathématiques n° 7  
MP\*1 & MP\*2  
Semaine du 15 au 20 novembre 2021

**Structures algébriques usuelles (révisions de première année)**

*Sans soulever de difficulté, on signalera que les notions d'algèbre linéaire étudiées en MPSI s'étendent au cas où le corps de base est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .*

*Les exercices proposés devront donc rester strictement dans ce cadre. La notion de caractéristique d'un corps est hors programme.*

**A - Espaces vectoriels**

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

---

**a) Espaces vectoriels**

---

---

**b) Sous-espaces vectoriels**

---

---

**c) Familles libres, génératrices, bases**

---

---

**d) Somme d'un nombre fini de sous-espaces**

---

Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces.

---

**B - Espaces de dimension finie**

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

---

**a) Existence de bases**

---

Théorème de la base extraite.

Théorème de la base incomplète.

---

---

**b) Dimension d'un espace de dimension finie**

---

---

**c) Sous-espaces et dimension**

---

**C - Applications linéaires**

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

---

**a) Généralités**

---

**b) Endomorphismes****c) Détermination d'une application linéaire**

Par l'image d'une base.

Par ses restrictions à une décomposition.

**d) Théorème du rang****e) Formes linéaires et hyperplans**

Forme linéaire.

Hyperplan.

Si  $H$  est un hyperplan de  $E$ , alors pour toute droite  $D$  non contenue dans  $H$  :  $E = H \oplus D$ . Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.

Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.

Si  $E$  est un espace de dimension finie  $n$ , l'intersection de  $m$  hyperplans est de dimension au moins  $n - m$ . Réciproquement, tout sous-espace de  $E$  de dimension  $n - m$  est l'intersection de  $m$  hyperplans.

Formes coordonnées relativement à une base.

Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

En dimension  $n$ , les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension  $n - 1$ .

Droites vectorielles de  $\mathbb{R}^2$ , droites et plans vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .

L'étude de la dualité est hors programme.

**i) Algèbres**

Algèbre.

Sous-algèbre.

Morphisme d'algèbres.

Les algèbres sont unitaires.

Exemples :  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathcal{L}(E)$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ .