



Colle de mathématiques n° 6  
MP\*1 & MP\*2  
Semaine du 08 au 13 novembre 2021

## Topologie des espaces vectoriels normés

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

---

### f) Parties compactes d'un espace normé

---

Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass.  
Une partie compacte est fermée et bornée.  
Une partie fermée d'une partie compacte est compacte.  
Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.  
Produit d'une famille finie de compacts.

La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.

---

### g) Applications continues sur une partie compacte

---

Image d'une partie compacte par une application continue.  
Théorème de Heine.

Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des bornes atteintes.

---

### h) Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé

---

Chemin continu joignant deux points.

Relation d'équivalence associée sur une partie  $A$  de  $E$ .  
Les classes d'équivalence sont les composantes connexes par arcs.

Parties connexes par arcs.

Dans des cas simples, une figure convaincante vaut preuve de connexité par arcs.  
Cas des parties convexes, des parties étoilées.

Les parties connexes par arcs de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.  
Image continue d'une partie connexe par arcs.

Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.

---

### i) Espaces vectoriels normés de dimension finie

---

Équivalence des normes sur un espace de dimension finie.  
Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie.

Démonstration non exigible.

Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.  
Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.  
Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.

Les étudiants doivent savoir que la convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

Si  $E$  est de dimension finie, toute application linéaire de  $E$  dans  $F$  est continue.

Continuité des applications polynomiales, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Exemple : déterminant.

## A - Séries numériques et vectorielles

### a) Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie

Sommes partielles. Convergence, divergence.

La série de terme général  $u_n$  est notée  $\sum u_n$ .

Somme et restes d'une série convergente.

En cas de convergence, notation  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

Linéarité de la somme.

Divergence grossière.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

La suite  $(u_n)$  et la série  $\sum(u_{n+1} - u_n)$  ont même nature.

Lien suite-série.

Cas des séries matricielles.

Série absolument convergente.

Le critère de Cauchy est hors programme.

Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.