



Colle de mathématiques n° 5
MP*1 & MP*2
Semaine du 18 au 23 octobre 2021

Topologie des espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Normes et espaces vectoriels normés

Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Structure d'espace vectoriel normé.
Distance associée à une norme.
Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.
Parties, suites, fonctions bornées.
Norme associée à un produit scalaire sur un espace pré-hilbertien réel.
Normes $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2, \| \cdot \|_\infty$ sur \mathbb{K}^n .
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans \mathbb{K} .
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes.
Produit fini d'espaces vectoriels normés.

Vecteurs unitaires.
Inégalité triangulaire.

b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.
Suites extraites, valeurs d'adhérence.

Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

c) Comparaison des normes

Normes équivalentes.

Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation des suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.
La comparaison de normes définies sur des espaces fonctionnels fait partie des capacités attendues des étudiants.

d) Topologie d'un espace normé

Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection d'une famille finie.
Voisinage d'un point.
Fermé d'un espace normé. Stabilité par intersection quelconque, par réunion finie.

Une boule ouverte est un ouvert.
Une boule fermée, une sphère, sont fermées.

Point intérieur, point adhérent.
 Intérieur, adhérence, frontière d'une partie.
 Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés.
 Partie dense.
 Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.
 Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A . Voisinage relatif.

Caractérisation séquentielle des fermés de A .

e) Étude locale d'une application, continuité

Limite en un point adhérent à une partie A .
 Caractérisation séquentielle.

Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de \mathbb{R} , limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.

Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.

Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée.

Continuité en un point.

Caractérisation séquentielle.

Opérations algébriques sur les applications continues.

Composition de deux applications continues.

Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.

Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.

Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|.$$

Les étudiants doivent savoir que deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Exemple : l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie de E .

Notation $\mathcal{L}_c(E, F)$.

La notion de norme subordonnée est hors programme.

Les notions de compacité et de connexité par arcs seront au programme de la prochaine colle.

La complétude est hors programme.

Les élèves savent qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, même si le résultat n'a pas encore été démontré.