

Colle de mathématiques n° 4 MP*1 & MP*2 Semaine du 07 au 12 octobre 2024

On rappelle que les notions d'algèbre linéaire étudiées en MPSI s'étendent au cas où le corps de base est un sous-corps de \mathbb{C} .

Les exercices proposés devront donc rester strictement dans ce cadre. La notion de caractéristique d'un corps est hors programme.

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Même programme que la semaine dernière plus :

Contenus	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire.	Interprétation géométrique.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.	Interprétation en termes d'endomorphisme. La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	Traduction matricielle. Expression à l'aide des valeurs propres de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable.
f) Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes	
Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente. Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0 . L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E .	Caractérisation des endomorphismes nilpotents et des matrices nilpotentes par le polynôme caractéristique.

Contenus

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

i) Polynômes annulateurs et réduction

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme simplement scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé.

Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable.

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé. Traduction matricielle.

Traduction matricielle.

j) Théorème de Cayley-Hamilton et sous-espaces caractéristiques

Théorème de Cayley-Hamilton.

Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé; E est somme directe des sous-espaces caractéristiques de u.

Traduction matricielle de cette décomposition : similitude à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant triangulaire et à termes diagonaux égaux.

La démonstration n'est pas exigible. Dimension d'un sous-espace caractéristique.

Mathématiques MP* 2024-2025