



# Colle de mathématiques n° 2

## MP\*1 & MP\*2

Semaine du 27 septembre au 02 octobre 2021

### Quelques précisions :

- les colles doivent démarrer sur un exercice technique étudiant l'intégrabilité d'une fonction explicite sur un intervalle;
- l'étude des intégrales semi-convergentes n'étant pas un objectif du programme, on restera raisonnable dans ce domaine;
- ce programme inclut le cours de première année concernant l'intégration sur un segment, et il est donc possible, après le premier exercice sus-cité, de donner un exercice d'intégration sur un segment;
- l'intégration des relations de comparaison sera au programme de la prochaine colle;
- les théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale et l'étude d'intégrales à paramètres ne sont pas au programme de cette colle.

### Intégration sur un segment, calcul de primitives : révisions de première année

### Intégration sur un intervalle quelconque

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Pour  $f$  continue par morceaux de  $[a, +\infty[$  dans  $\mathbb{K}$ , l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f$  est dite convergente si la fonction  $x \mapsto \int_a^x f$  a une limite finie en  $+\infty$ . Si tel est le cas, on note  $\int_a^{+\infty} f$  cette limite.

Linéarité de l'intégrale sur  $[a, +\infty[$ , positivité. Dérivation de  $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$  si  $f$  est continue.

Notations  $\int_a^{+\infty} f, \int_a^{+\infty} f(t) dt$ .

#### b) Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Une fonction  $f$  est dite intégrable sur  $[a, +\infty[$  si  $\int_a^{+\infty} |f|$  converge.

Si  $f$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ , alors  $\int_a^{+\infty} f$  converge.

On utilise indifféremment les expressions «  $f$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$  », et « l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f$  converge absolument ».

L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

#### c) Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Si  $f$  est positive sur  $[a, +\infty[$ , l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f$  converge

si et seulement si  $x \mapsto \int_a^x f$  est majorée.

Pour  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ , étude de l'intégrabilité de  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  sur  $[1, +\infty[$ .

Pour  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles positives continues par morceaux sur  $[a, +\infty[$  :

- si  $0 \leq f \leq g$ , l'intégrabilité de  $g$  sur  $[a, +\infty[$  implique celle de  $f$  ;
- si  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(g(x))$ , l'intégrabilité de  $g$  sur  $[a, +\infty[$  implique celle de  $f$  ;
- si  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ , l'intégrabilité de  $g$  sur  $[a, +\infty[$  équivaut à celle de  $f$ .

#### d) Intégration sur un intervalle quelconque

Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert de  $\mathbb{R}$ .

Pour  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ , étude de l'intégrabilité de  $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$  sur  $]a, b]$ , de l'intégrabilité de  $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$  sur  $]b, a[$ .

Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle ouvert  $]a, b[$  de  $\mathbb{R}$ ,  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}^2}$ .

Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , linéarité et positivité de l'application  $f \mapsto \int_I f$  sur l'espace des fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{K}$  dont l'intégrale converge.

Relation de Chasles.

Espace des fonctions intégrables de  $I$  dans  $E$ .

Inégalité triangulaire.

Si  $f$  est continue et intégrable sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  et si  $\int_I f = 0$ , alors  $f$  est identiquement nulle.

Changement de variable : étant données une fonction  $f$  continue sur  $]a, b[$  et une fonction  $\varphi : ]\alpha, \beta[ \rightarrow ]a, b[$  bijective, strictement croissante et de classe  $\mathcal{C}^1$ , les intégrales  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$  sont de même nature et égales en cas de convergence.

Intégration par parties sur un intervalle quelconque :

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

Notations  $\int_a^b f, \int_a^b f(t) dt$ .

On utilise indifféremment les expressions «  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$  », et « l'intégrale  $\int_a^b f$  converge absolument ».

Notations  $\int_a^b f, \int_a^b f(t) dt$ .

Notation  $\int_I f$ .

Adaptation au cas où  $\varphi$  est strictement décroissante.

Les étudiants peuvent appliquer ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable simples (fonctions affines, puissances, exponentielle, logarithme).

L'existence des limites du produit  $fg$  aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de  $fg'$  et  $f'g$  sont de même nature. Notation  $[fg]_a^b$ .