



Colle de mathématiques n° 1
MP*1 & MP*2
Semaine du 20 au 25 septembre 2021

Révision sur les fonctions numériques d'une variable réelle

Continuité, dérivabilité, formules de Taylor.

Fonctions convexes

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Parties convexes d'un espace vectoriel réel

Barycentre.

\Leftrightarrow PC et SI : centre de masse (ou centre de gravité).

Partie convexe. Caractérisation à l'aide de barycentres à coefficients positifs.

b) Fonctions convexes d'une variable réelle

Une fonction f est convexe sur l'intervalle I de \mathbb{R} si pour tout (x, y) de I^2 et tout λ de $[0, 1]$:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Pour f convexe, les étudiants doivent connaître l'inégalité

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

où x_1, \dots, x_n sont des points de I et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels positifs de somme 1.

Caractérisations : convexité de l'épigraphe, inégalité des pentes.

Position relative du graphe et de ses cordes.

Fonction concave.

c) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables

Caractérisation des fonctions convexes dérivables sur I , des fonctions convexes deux fois dérivables sur I .

Exemples d'inégalités de convexité.

Position relative du graphe d'une fonction convexe dérivable et de ses tangentes.
